EVLERO

CONSTRUCTIO

LENTIVM

OBIECTIVARVM

N. 12 T. 1



CONSTRVCTIO
LENTIVM OBIECTIVARVM
EX
DVPLICI VITRO

quae neque confusionem a figura sphaerica oriundam, neque dispersionem colorum pariant,

Auctore
LEONHARDO EVLERO.

DISSERTATIO

occasione Quaestionis de Perfectione Telescopiorum ab Imperiali Academia Scientiarum Petropolitana pro praemio propositae conscripta.





PETROPOLI
Typis Academiae Scientiarum
1762.

1.

Lentes obiectiuas, quae vulgo ad Telescopia adhiberi solent, duplici vitio laborare, iam pridem est obseruatum. Primum enim ob figuram sphaericam, quae vtrique faciei inducitur, (quoniam ad alias figuras, quae aptiores essent futurae, praxis vitra poliendi nondum est accommodata,) a radiis extremis alia imago efformatur atque a mediis, quo fit, vt quo maior tali lenti apertura concedatur, eo maior confusio in imaginem redundet. Alterum autem vitium, quo radii diuersorum colorum haud pari refractione per vitrum transmittuntur, ideoque disperguntur, non minus lentes infestat, dum imagines a diuersis coloribus formatae, eo magis a se inuicem diuelluntur, quo maior earum a lente fuerit distantia. Atque ambo haec vitia ita arcte cum vitri natura et sphaerica figura sunt coniuncta, vt a lentibus nullo modo separari queant.

2. Loquor hic autem de lentibus simplicibus ex vitro paratis; quodsi enim duas pluresue lentes coniungere velimus, vt vnicam quasi lentem referant, iam

dudum modum exposui, quo vtrumque vitium seorsim euitari potest. Binis enim pluribusue lentibus coniungendis ostendi, quomodo singulas comparatas esse oporteat, vt confusio ob sphaericam figuram oriunda penitus tollatur, quod etiam in praxi vsu haud caruisse videtur. Alterum autem vitium, in dispersione colorum positum, multiplicandis lentibus non solum non destruere, sed ne diminuere quidem licet, siquidem lentes ex simili materia pellucida parentur.

3. Tum equidem credideram, omne vitrum ratione refractionis perinde esse comparatum, ideoque in mentem mihi venerat, lentes ex vitro et aqua, aliaue materia fluida pellucida, parare, ita vt fluidum intra binas lentes vitreas includeretur. Atque examine instituto inueni, figuram lentium vtique ita attemperari posse, vt dispersio colorum coerceatur. Feci hac de re plurima experimenta, quibus istiusmodi lentes a dispersione colorum immunes deprehendi, verum alterum vitium eas tanto magis inquinabat, vt nullus plane vsus inde expectandus videretur. Etsi enim priori scopo infinitis modis satisfieri poterat, inter quos alii magis, alii minus, altero vitio essent infecti, tamen partim prolixitas calculi, quam haec inuestigatio postulat, me deterruit, ne in figuras lentium aptiores inquirerem, partim vero desperaui, tales figuras, si quas inuenissem, quam accuratissime per praxin obtineri posse. Alio autem tempore hoc negotium diligentius persequi constitui.

4.

4. Theoria autem refractionis, cui illam lentium aqua repletarum confectionem superstruxi, etsi certissimis principiis innixa, plane erat noua, ac Theoriae *Newtonianae* aduersabatur, in qua assumitur, nunquam vllo modo dispersionem colorum ne diminui quidem posse, quotcunque etiam diuersa media refringentia in vsum vocentur. Etsi autem Vir summus hoc principium nusquam demonstrauerat, sed id potius precario assumserat, ne intricatioribus inuestigationibus, quae ad eius institutum minus pertinerent, se implicaret; tamen acrem ob hanc causam adeptus sum aduersarium *Dollondum* Anglum, qui mea principia, vtpote a *Newtonianis* discrepantia, penitus censuit profliganda, quod mihi occasionem dedit Theoriam meam firmissimis rationibus confirmandi, et ab omnibus dubiis liberandi.

5. Tantum abest, vt defensio mea Viro Clarissimo displicuisse videatur, vt potius omni studio principium illud *Newtonianum* per experimenta explorauerit. Mox quidem binis prismatibus, altero vitreo, altero aqueo, coniunctis deprehendit, opinionem illam *Newtono* tributam subsistere non posse, dum obseruauit, sublata refractione dispersionem colorum non tolli ac vicissim; quod experimentum meae Theoriae corroborandae mirifice inseruit. (Vid. Transact. vol. L) Deinceps vero etiam varias vitri species pari modo examini subiecit, paratisque inde variis cuneis animaduertit, dispersionem colorum a refractionis quantitate non pendere, ideoque diuersas vitri species diuersa vi refringendi esse praeditas. Vnde recte conclusit, binis lentibus ex di-

verſis vitri ſpeciebus factis, coniungendis, vtique fieri poſſe, vt diſperſio colorum penitus tollatur. Hunc in finem neceſſe erat, alteram lentem conuexam confici, ita vt conuexitas ad concauitatem datam teneret rationem a diuerſitate refractionis determinatam.

6. Cum hac ratione tantum diſtantia foci vtriusque lentis definiatur, pro eadem vero diſtantia foci innumerabiles lentes confici poſſint, merito ſuſpicatus eſt, inter hos infinitos caſus eiusmodi binarum lentium fabricam reperiri, quae etiam ab altero vitio confuſionis a ſphaerica figura natae eſſet immunis. Non videtur Vir Clar. calculo, vel vlla Theoria, ad hanc inueſtigationem eſſe vſus; ſed potius plurimis huiusmodi lentibus diuerſae formae elaboratis, binis coniungendis explorauit, quo caſu confuſio imaginis minima, atque adeo nulla, eſſet proditura. Hoc modo eiusmodi conſtructionem ſe eruiſſe profitetur, quae lentem talem compoſitam ab vtroque vitio liberam praeſtaret; quod ſine dubio ſummum eſt inuentum, quod quidem in Dioptrica deſiderari queat, ac merito a Cel. *Shorto* ſummis laudibus condecoratur.

7. Minime autem quicquam de gloria Clar. Inventoris detracturus, hoc argumentum, meo more, per ſolam Theoriam pertractabo, quo clarius appareat, quomodo experientia cum Theoria conſentiat, ac num forte haec conſtructio lentium compoſitarum ad maiorem perfectionis gradum euehi queat. Aſſumo igitur, dari duplicis generis vitrum, atque in ſolutionem huius

ius problematis fum inquifiturus, *quomodo inde binas lentes confici oporteat, quae coniunctae obiecta vehementer remota tam fine vlla colorum difperfione, quam fine vlla confufione a figura fphaerica oriunda, repraefentent.* Quatuor ergo hic occurrunt facies fphaericae, quarum fingularum, fiue fint conuexae, fiue concauae, radii determinari debent, vt huic duplici conditioni fatisfiat; ex quo patet, etiamfi lentis compofitae diftantia foci praefcribatur, tres tamen quantitates determinandas remanere, ideoque ob duas tantum conditiones adimplendas, infinitas adhuc folutiones locum habere poffe, ex quibus deinceps eam, quae ad praxin commodiffima videbitur, eligere licebit.

8. Sint igitur AB et CD binae lentes ad communem axem FK conftitutae, quas tanquam vtrinque conuexas fpectabo, et quarum illa AB obiecta verfus dirigatur. Pro radiis lucis mediae naturae fit ratio refractionis ex aere in vitrum, ex quo prior lens AB eft confecta, vt ζ ad η; ratio autem refractionis ex aere in vitrum, ex quo lens pofterior CD conftat, fit vt ζ ad θ, fingulae facies porro harum lentium fint fphaericae, et quidem: Fig. 1.

pro lente priori AB fit radius faciei { anterioris AaB $= a$; pofterioris AbB $= b$ }

pro lente altera CD fit radius faciei { anterioris CcD $= c$; pofterioris CdD $= d$. }

Ambas autem lentes proxime effe coniunctas pono, et vtriusque craffitiem quam minimam, vt eam in calculo negligere liceat.

9. Statuatur porro prioris lentis AB distantia focalis $= p$, posterioris vero lentis distantia focalis $= q$, eritque ex principiis diopricis:

$$p = \frac{\eta a b}{(\zeta - \eta)(a + b)} \quad \text{et} \quad q = \frac{\eta c d}{(\zeta - \eta)(c + d)}$$

seu $\frac{1}{p} = (\frac{\zeta}{\eta} - 1)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ et $\frac{1}{q} = (\frac{\zeta}{\eta} - 1)(\frac{1}{c} + \frac{1}{d})$, qui valores quidem pro radiis lucis mediae naturae, iisque tantum, qui proxime ad axem transeunt, valent. Quodsi iam pro lente AB distantia obiecti ante eam fuerit $= f$, imago post eam cadet ad distantiam g, vt sit $g = \frac{f p}{f - p}$, seu $\frac{1}{g} = \frac{1}{p} - \frac{1}{f}$, ideoque pro p restituto valore erit $\frac{1}{f} + \frac{1}{g} = (\frac{\zeta}{\eta} - 1)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$.
Simili modo si ante alteram lentem CD obiecti distantia sit $= h$, imago post eam reperietur ad distantiam $= k$, vt sit $\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = (\frac{\zeta}{\eta} - 1)(\frac{1}{c} + \frac{1}{d})$.

10. Iunctis igitur his lentibus, manenteque distantia obiecti ante priorem $= f$, quia imago ab ea proiecta vicem gerit obiecti respectu alterius lentis CD, erit $h = - g$, hincque imago per lentem duplicatam cadet ad distantiam k, vt sit

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{k} = (\frac{\zeta}{\eta} - 1)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}) + (\frac{\zeta}{\eta} - 1)(\frac{1}{c} + \frac{1}{d})$$

seu $\frac{1}{f} + \frac{1}{k} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, ita vt, sumta distantia f infinita, lentis duplicatae distantia focalis sit $k = \frac{p q}{p + q}$.
Quare si fuerit data, patet, non solum vtriusque lentis distantias focales p et q infinitis modis variari posse, ita vt altera data altera definiri possit, sed etiam vtraque lens pro data eius distantia focali infinitas variationes respectu faciërum recipere potest, ita vt, altera facie data, alteram semper determinare liceat.

11. His in genere animaduersis primo satisfaciamus huic conditioni, vt nulla colorum dispersio oriatur, seu lentis duplicatae distantia imaginis k nullam variationem patiatur, etiamsi rationes refractionis $\zeta:\eta$ et $\zeta:\theta$ ob diuersam radiorum lucis naturam immutentur. Cum autem haec immutatio sit quasi infinite parua, differentiando huic conditioni satisfieri poterit. Ponamus ergo pro radiis mediae naturae:

$$\frac{\zeta}{\eta}=m \text{ et } \frac{\zeta}{\theta}=n$$

ita vt habeamus hanc aequationem:

$$\frac{1}{f}+\frac{1}{k}=(m-1)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+(n-1)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

in qua literae a, b, c, d, f et k vt quantitates constantes sunt spectandae, literae vero m et n vt variabiles, ita vt haec aequatio perinde subsistat, etiamsi ea differentietur. Differentiatio vero praebet:

$$dm\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+dn\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)=0.$$

12. Cum igitur distantias focales p et q vtriusque lentis introducendo, ob $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{(m-1)p}$ et $\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{(n-1)q}$, fit $\frac{dm}{(m-1)p}+\frac{dn}{(n-1)q}=0$, seu $q=\frac{-p(m-1)dn}{(n-1)dm}$; hinc ratio inter distantias focales vtriusque lentis p et q determinatur, vt diuersa radiorum natura nullam colorum dispersionem pariat, sed ab omnis generis radiis lucis imagines vniantur. Ac si talis statuatur ratio inter distantias focales, vt sit $q=-\frac{(m-1)dn}{(n-1)dm}p$, erit pro omnis generis radiis $\frac{1}{f}+\frac{1}{k}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}$; neque haec determinatio ad obiecta infinite remota est restricta, sed quaecunque fuerit obiecti distantia f, imago sine vlla colorum

 disper-

disperſione poſt lentem geminatam ad diſtantiam $=k$ cernetur.

13. Quodſi ambae lentes ex pari vitro conficiantur, vt eſſet $n=m$, ac propterea $dn=dm$, foret $q=-p$, et diſtantia foci lentis compoſitae prodiret infinita, quae ratio eſt, quod ex vitro eiusdem indolis, quotcunque etiam lentes adhibeantur, diſperſio colorum nullo modo deſtrui poſſit. Admiſſo autem duplicis generis vitro, vt numeri m et n ſint inaequales, eatenus tantum diſperſio colorum tolli poteſt, quatenus non eſt $\frac{(m-1)dn}{(n-1)dm}=1$, quia tum ſuperius incommodum recurreret. Quare ſi eſſet $dm:dn=m-1:n-1$, vti *Newtonus* ſtatuiſſe perhibetur, lentes vtique compoſitae aeque parum ab hoc vitio liberari poſſent, ac ſimplices. Cum autem haec opinio non ſolum firmiſſimis argumentis a me ſit profligata, ſed etiam per experimenta a Cl. *Dollondo* ſufficienter refutata, deſtructio colorum ob hanc rationem locum habere eſt cenſenda.

14. Quoniam dm et dn variationem refractionis radiorum a media natura diſcrepantium exprimunt, vera ratio ita ſe habet, vt ſit $dm:dn=mlm:nln$, quemadmodum alio loco ſufficienter demonſtraui. Hac igitur ſtabilita ratione ex vitri differentia ratio diſtantiarum focalium $p:q$ ita ſe habebit, vt ſit $q=-\frac{(m-1)nln}{(n-1)mlm}p$. Statuamus ergo breuitatis gratia: $\frac{(m-1)nln}{(n-1)mlm}=\lambda$, vt ſit $q=-\lambda p$, neque λ vnitati aequetur, lentis compoſitae diſtantia focalis erit $k=\frac{-\lambda pp}{p-\lambda p}$, ſeu $k=\frac{\lambda p}{\lambda-1}$. Data ergo iſta diſtantia focali k, vtriusque lentis ſimplicis diſtan-

distantia focalis ita debet definiri, vt sit $p = \frac{\lambda-1}{\lambda}k$ et $q = -(\lambda-1)k$.

15. Si ergo numerus λ fuerit vnitate maior, lens prior A B erit conuexa, seu distantiam focalem habebit positiuam, posterior vero C D concaua, seu distantiam focalem habebit negatiuam; sin autem λ sit fractio vnitate minor, contrarium eueniet. Quo autem indoles numeri λ facilius perspici queat, quia numeri m et n non multum vnitatem excedunt, erit per series:

$$lm = l(1+m-1) = m-1-\tfrac{1}{2}(m-1)^2+\tfrac{1}{3}(m-1)^3 - \tfrac{1}{4}(m-1)^4 + \text{etc.}$$

$$ln = l(1+n-1) = n-1-\tfrac{1}{2}(n-1)^2+\tfrac{1}{3}(n-1)^3 - \tfrac{1}{4}(n-1)^4 + \text{etc.}$$

hincque numerus λ ita definietur:

$$\lambda = \frac{n(1-\frac{1}{2}(n-1)+\frac{1}{3}(n-1)^2-\frac{1}{4}(n-1)^3+\text{etc.})}{m(1-\frac{1}{2}(m-1)+\frac{1}{3}(m-1)^2-\frac{1}{4}(m-1)^3+\text{etc.}}$$

seu scribendo $m = 1+m-1$ et $n = 1+n-1$, erit

$$\lambda = \frac{1+\frac{1}{2}(n-1)-\frac{1}{6}(n-1)^2+\frac{1}{12}(n-1)^3-\text{etc.}}{1+\frac{1}{2}(m-1)-\frac{1}{6}(m-1)^2+\frac{1}{12}(m-1)^3-\text{etc.}}$$

vnde patet, si $n > m$ fore $\lambda > 1$, at si $n < m$ fore $\lambda < 1$.

16. Inuentis autem distantiis focalibus p et q, facies vtriusque lentis infinitas adhuc determinationes admittunt, quod quo facilius perspiciatur, introducamus binos nouos numeros indeterminatos μ et ν, et cum esse debeat $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{1}{(m-1)p}$ et $\frac{1}{c}+\frac{1}{d} = \frac{1}{(n-1)q}$, statuamus:

$$a = \frac{m-1}{\mu}p;\quad b = \frac{m-1}{1-\mu}p;\quad c = \frac{n-1}{\nu}q;\quad d = \frac{n-1}{1-\nu}q.$$

 Quo-

Quomodocunque enim hi numeri μ et ν accipiantur, lentes ſemper praeſcriptas diſtantias focales obtinebunt, ac ſumto $p = \frac{\lambda - 1}{\lambda} k$ et $q = -(\lambda - 1)k$, binae lentes coniunctae non ſolum diſtantiam focalem praeſcriptam k habebunt, ſed etiam imagines quorumuis obiectorum ſine vlla colorum diſperſione repraeſentabunt. Supereſt igitur, vt numeros μ et ν ita definiamus, vt etiam lens compoſita ab altero vitio, confuſione ſcilicet a figura ſphaerica facierum lentium oriunda, liberetur.

17. Primum igitur diſpiciendum erit, quomodo in vnica lente imago a radiis extremis formata, ab imagine, quae a radiis per medium lentis tranſeuntibus formatur, diſcrepet. Sit igitur propoſita lens AB, cuius faciei AaB radius ſit $= a$, faciei vero $AbB = b$; quam vtramque vt conuexam ſpecto, ratio refractionis autem ex aere in vitrum, quo haec lens conſtat, ſit $\zeta : \eta$, ſeu $m : 1$, poſito $\frac{\zeta}{\eta} = m$. Hinc eius diſtantia focalis erit $p = \frac{ab}{(m-1)(a+b)}$, vt ſit $\frac{1}{p} = (m-1)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$, vnde vt ante ponamus $a = \frac{m-1}{\mu} p$ et $b = \frac{m-1}{1-\mu} p$. Iam ſi obiecti F ab hac lente diſtantia ſit $aF = f$, a radiis axi proximis imago referetur in G, vt ſit diſtantia $bG = \frac{fp}{f-p}$; per radios autem extremos FA, FB imago propius repraeſentatur in g, et ſpatiolum Gg interuallum confuſionis appellari ſolet, quod igitur ſollicite inueſtigari oportet.

18. Denotet x ſemidiametrum aperturae, atque calculo non parum taedioſo, quem idcirco hic repetere nolo, ſpatium illud confuſionis ita reperitur expreſſum:

$((m+2)$

$$\frac{\begin{array}{l}((m+2)\mu\mu-m(2m+1)\mu+m^2)ff\\+(m-1)(4(m+1)\mu-m(3m+1))fp\\+(m-1)^2(3m+2)pp\end{array}}{2m(m-1)^2(f-p)}\cdot\frac{xx}{p}=Gg.$$

Vnde patet, ſi obiecti diſtantia f fuerit infinita, fore hoc ſpatium diffuſionis:

$$Gg=\frac{(m+2)\mu\mu-m(2m+1)\mu+m^2}{2m(m-1)^2}\cdot\frac{xx}{p}$$

quod euaneſcere nequit, quicunque valor numero μ tribuatur. Minimum autem euadit, ſi capiatur $\mu=\frac{m(2m+1)}{2(m+2)}$; quem caſum, quo diffuſio imaginis in foco fit minima, *Hugenius* iam elicuit.

19. Reuertamur iam ad lentem noſtram geminatam ante deſcriptam, ac ponamus obiecti diſtantiam eſſe quaſi infinitam, eritque pro radiis per medium lentis tranſeuntibus diſtantia imaginis G, a ſola prima lente proiectae $dG=p$, ac per lentes ambas proiectae $dK=\frac{pq}{p+q}$. Pro radiis vero extremis, poſita aperturae ſemidiametro $=x$, per ſolam primam lentem imago erit in g, vt ſit $dg=p-M.\frac{xx}{p}$ exiſtente

$$M=\frac{(m+2)\mu\mu-m(2m+1)\mu+m^2}{2m(m-1)^2}$$

quae imago cum locum teneat obiecti ratione poſterioris lentis, ponatur haec diſtantia negatiue ſumta $-p+M.\frac{xx}{p}=g$; eritque imaginis per alteram lentem proiectae in k diſtantia $dk=\frac{gq}{g-q}-N.\frac{xx}{q}$, ſiquidem ponatur:

$$N=\frac{\begin{array}{l}((n+2)\nu\nu-n(2n+1)\nu+n^2)gg\\+(n-1)(4(n+1)\nu-n(3n+1))gq\\+(n-1)^2(3n+2)qq\end{array}}{2n(n-1)^2(g-q)^2}.$$

 20.

20. Cum iam ſit $g = -p + M.\frac{xx}{p}$, erit $\frac{gq}{g-q}$ $= \frac{-q(p - M.\frac{xx}{p})}{-p - q + M.\frac{xx}{p}}$ vbi cum particulam $\frac{xx}{p}$ vt valde paruam ſpectare liceat, erit ſatis exacte

$$\frac{gq}{g-q} = \frac{pq}{p+q} - \frac{qq}{(p+q)^2} M.\frac{xx}{p}.$$

Quam ob rem imago per lentem duplicatam a radiis extremis exhibita cadet in k, vt ſit:

$$dk = \frac{pq}{p+q} - \frac{qq}{(p+q)^2} M.\frac{xx}{p} - N.\frac{xx}{q}$$

in valore autem numeri N, quia particulam minimam $\frac{xx}{q}$ afficit, loco g ſcribere licet valorem vero proximum $-p$, ita vt ſit:

$$N = \frac{+((n+2)\nu\nu - n(2n+1)\nu + n^2)pp - (n-1)(4(n+1)\nu - n(3n+1))pq + (n-1)^2(3n+2)qq}{2n(n-1)^2(p+q)^2}$$

et ſpatium diffuſionis eſt $Kk = (\frac{qq}{p(p+q)^2}M + \frac{1}{q}N)xx$.

21. Totum ergo negotium huc reductum eſt, vt hoc ſpatium diffuſionis ad nihilum redigatur, ſeu vt fiat:

$$Mq^2 + Np(p+q)^2 = 0$$

quae aequatio per $2n(n-1)^2$ multiplicata praebet:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{n(n-1)^2}{m(m-1)^2}((m+2)\mu\mu - m(2m+1)\mu + m^2)q^2 \\ \quad + ((n+2)\nu\nu - n(2n+1)\nu + n^2)p^2 \\ \quad - (n-1)(4(n+1)\nu - n(3n+1)ppq \\ \quad + (n-1)^2(3n+2)pqq \end{array}\right\} = 0$$

Quia

Quia ergo prior conditio dedit $q = -\lambda p$, existente $\lambda = \frac{(m-1)\,n\,l\,n}{(n-1)\,m\,l\,m}$, habebimus:

$$\frac{n(n-1)^2}{m(m-1)^2}\lambda^2\big((m+2)\mu\mu - m(2m+1)\mu + m^2\big) =$$
$$(n+2)\nu\nu - n(2n+1)\nu + n^2$$
$$+ \lambda(n-1)\big(4(n+1)\nu - n(3n+1)\big)$$
$$+ \lambda\lambda(n-1)^2(3n+2)$$

ex qua aequatione sine dubio bini numeri μ et ν infinitis modis realiter definiri possunt.

22. Cum haec aequatio nimis sit perplexa, eam ad formam simpliciorem reducamus, ponendo:

$$\mu = \frac{m(2m+1)+my}{2(m+1)} \text{ et } \nu = \frac{n(2n+1)-4\lambda(nn-1)+nz}{2(n+2)}$$

ac facta substitutione peruenietur ad hanc aequationem:

$$\frac{m(n-1)^2(n+2)}{n(m-1)^2(m+2)}\lambda^2(yy+4m-1) = zz - 4\lambda(\lambda-1)(n-1)^2 + 4n - 1.$$

Statuatur breuitatis gratia $\frac{m(n-1)^2(n+2)}{n(m-1)^2(m+2)}\lambda^2 = A$, qui numerus plerumque parum ab vnitate differet, eritque:

$$zz = A(4m-1) - (4n-1) + 4\lambda(\lambda-1)(n-1)^2 + Ayy$$

nisi igitur fuerit $4n-1 > A(4m-1)$, pro y omnes numeros accipere, et ex singulis numerum z definire licet; sin autem $4n-1 > A(4m-1)$, minores tantum valores ipsius y excluduntur.

23. Ad vsum practicum autem inprimis curandum est, vt numeri μ et ν intra limites 0 et 1 contineantur, vel saltem ne multum eos transgrediantur, id quod plerumque eueniet, quando numeris y et z quam minimos valores tribuere licuerit. Tum vero etiam obseruandum est, quicunque numeri pro y et z satis-

satisfaciant, eos aeque affirmatiue ac negatiue accipi posse, vnde quadruplices numeri pro μ et ν obtinebuntur, sicque solutionum multitudo vehementer augetur. Dummodo ergo duae vitri species ratione refractionis notabiliter diuersae habeantur, facile erit, infinitas huiusmodi lentium geminatarum constructiones exhibere, quae vtroque vitio, quo lentes ordinariae inquinantur, careant, atque ex illis eas, quae ad praxin maxime videantur accommodatae, eligi conueniet, sicque nullum erit dubium, quin huiusmodi lentes perfectae confici atque ad vsum transferri queant.

24. Clar. *Dollond* quidem rationem refractionis pro vtraque vitri specie, qua vsus est, non definiuit, neque ergo lentes duplicatas ab eo confectas mihi ad calculum reuocare licet. Ex ipsis autem calculi formulis perspicuum est, vtramque refractionis legem, numeris m et n contentam, exactissime cognitam esse debere, cum leuis error saepe ingens discrimen in fabricam lentium inducere valeat. Consultum ergo erit, pro quouis casu oblato aliquot hypotheses pro numeris m et n fingere, quae a vero in vtramque partem declinent, vt appareat, quanta inde differentia in constructione lentium nascatur. Inprimis vero necesse erit, calculo peracto, plura experimenta instituere, sicque Theoria adiuti tandem ad optatum finem pertingemus. Quin etiam merito sperare licet, hoc modo non solum lentes solitis multo praestantiores, sed etiam plane perfectissimas obtineri posse, in quo negotio certe neque sumtibus neque labori parcendum videtur.

25.

25. Cum igitur ad certas vitri ſpecies calculum applicari nondum liceat, fingam, binas ſpecies vitri mihi proponi, alteram denſiorem, pro qua radiorum ex aere intrantium ratio refractionis ſit, 31 : 20; altera vero ſpecies aliquanto minus ſit denſa, ita vt ratio refractionis ſit vt 3 : 2. Illa ſpecies eius videtur vitri, quod vulgo ad lentes dioptricas adhiberi ſolet, haec vero fortaſſe vitrum vilius continet. Etiamſi autem talis ſpecies non daretur, tamen euolutio huius caſus nobis ſatis perſpicue monſtrabit, quomodo binae lentes, ex vitro denſiori et rariori paratae, formari debeant, vt effectum deſideratum praeſtent. Duplicem autem hic inueſtigationem inſtitui conueniet, prout lens prior ex vitro, vel rariori, vel denſiori, conficiatur; primo igitur in conſtructionem lentium perfectarum inquiram, quando ponitur $m = \frac{3}{2}$ et $n = \frac{31}{20}$; tum vero vice verſa ponam $m = \frac{31}{20}$ et $n = \frac{3}{2}$; pro vtroque vero caſu calculus haud multum diſcrepabit.

I. Caſus, quo $m = \frac{\zeta}{\eta} = \frac{3}{2}$ et $n = \frac{\zeta}{\theta} = \frac{31}{20}$.

26. Hic igitur primo pro radiis ſingularum facierum habemus:

$$a = \frac{1}{2\mu} p;\ b = \frac{1}{2(1-\mu)} p;\ c = \frac{31}{20\nu} q;\ d = \frac{31}{20(1-\nu)} q$$

tum vero quaeratur numerus $\lambda = \frac{31\, l n}{33\, l m}$. Eſt vero

$ln = 0{,}1903317$; $lln = 9{,}2795111$; $llm = 9{,}2457380$

$lm = 0{,}1760913$; $l31 = 1{,}4913617$; $l33 = 1{,}5185139$

0,7708728	0,7642519
0,7642519	

$l\lambda = 0{,}0066209.$

Ergo $\lambda = 1,015315$; et $q = -1,015315p$; tum vero si lentis compositae distantia focalis esse debeat $= k$, erit:

$$p = 0,015083k \text{ et } q = -0,015315k,$$

sicque lens prior erit conuexa, posterior vero concaua. Porro reperitur $A = \frac{25773}{21700}\lambda^3 dt$ $\quad l\lambda^3 = 0,0198627$

$$l25773 = 4,4111650$$

hinc $A = 1,24328$. $\quad 4,4310277$

$$l21700 = 4,3364597$$

ideoque aequatio resoluenda $\quad lA = 0,0945680$

$$zz = 5A - 5,2 + 0,018815 + Ayy, \text{ seu}$$

$$zz = 1,035215 + 1,24328yy.$$

27 A numeris autem y et z ita pendent numeri μ et ν, vt sit:

$$\mu = \frac{12 + 3y}{14} \text{ et } \nu = \frac{132,24 + 310z}{1420}.$$

Hi valores fere ad medium limitum 0 et 1 perduci possunt, sumendo $y = -\frac{5}{3}$, quo fiat exacte $\mu = \frac{1}{2}$; tum vero erit:

$$zz = 1,035215 + 3,453555 = 4,488770$$

et $z = 2,11867$, hincque $\nu = \frac{789,0277}{1420} = 0,55565$; vnde deducimus $a = p$; $b = p$; $c = \frac{0,55}{0,5556}q$; $d = \frac{0,55}{0,4444}q$. Cum nunc sit $p = 0,015083k$ et $q = -0,015315k$, radii facierum lentis ita se habebunt:

$$a = 0,015083k;\ c = -0,015159k$$
$$b = 0,015083k;\ d = -0,018956k.$$

In

In fig. 4. et 5. talem lentem duplicatam exhibeo pro casu $k = 10000$ scrup. pedis, seu 10 pedum. Prior quidem ad maiores arcus extenditur, qui vix admitti posse videntur; posterior nimis magnos arcus non inuoluit, at vero etiam sufficientis aperturae, qualem distantia focalis 10 pedum postulat, non est capax. Quodsi vero huiusmodi lentes ad multo maiores distantias focales construantur, aperturam satis magnam recipere poterunt. Fig. 4. et 5.

II. Casus, quo $m = \frac{11}{20}$ et $n = \frac{1}{2}$.

28. Hic statim fit pro facierum radiis:

$$a = \frac{11}{20\mu}p;\ b = \frac{11}{20(1-\mu)}p;\ c = \frac{1}{2\nu}q;\ d = \frac{1}{2(1-\nu)}q$$

numeri vero λ valor praecedentis fit reciprocus, scilicet:

$$\lambda = 0,984685 \quad \text{et} \quad l\lambda = 9,9933791 \quad \text{hincque}$$

$$p = -0,015315k \quad \text{et} \quad q = 0,015083k,$$

vbi ratio inter conuexitatem et concauitatem eadem est atque ante. Quin etiam valor ipsius A praecedentis est reciprocus, ideoque $A = 0,804326$, vnde obtinetur haec aequatio:

$$zz = 4,182495 - 5 - 0,014855 + 0,804326yy$$

seu $zz = -0,832360 + 0,804326yy$; tum vero est

$$\mu = \frac{1271 + 110y}{1420} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{2,15512 + 12z}{14}$$

si capiatur $y = \frac{1}{2}$, reperitur $zz = 0,977373$ et $z = \pm 0,98860$, at si $y = 2$, reperitur $zz = 2,384944$ et $z = \pm 1,54432$.

29. Euidens est, postremum casum, si ipsius z capiatur valor positiuus, ipsius y vero negatiuus, numeros μ et ν proxime ad $\frac{1}{2}$ reducere; erit ergo:

$\mu =$

$$\mu = \frac{651}{1420} = 0,45845 \quad \text{et} \quad \nu = \frac{6,78608}{14} = 0,48472,$$

hincque

$$a = \frac{0,55}{0,45845}\,p;\; b = \frac{0,55}{0,54155}\,p;\; c = \frac{q}{0,96944};\; d = \frac{q}{1,03056}$$

qui valores per diſtantiam focalem k lentis ipſius compoſitae ita exprimuntur:

$$a = -0,018373\,k;\; c = +0,015558\,k$$
$$b = -0,015554\,k;\; d = +0,014636\,k.$$

Haec igitur lens compoſita vix differt a praecedente, ſi inuertatur, et lens concaua obiectum verſus dirigatur. Interim tamen calculus non oſtendit, talem inverſionem ſemper locum habere; vnde et hoc caſu inuerſio proxime tantum valet, et fortuito euenire cenſenda eſt. Probe autem tenendum eſt, menſuras calculo erutas ſummo ſtudio in praxi obſeruari oportere; ſi enim vel minimum ab iis aberrauerimus, lens inde confecta ingentia vitia facile contrahet.

30. Inprimis autem numerus λ accuratiſſime eſt obſeruandus, cum leuiſſima aberratio diſperſionem colorum vix minuat, id quod hoc modo oſtendi poteſt: Concipiatur lens ſimplex diſtantiae focalis $= k$, et ob diuerſam radiorum refrangibilitatem focus diffundetur per ſpatiolum dk, vt ſit $\frac{-dk}{kk} = \frac{dm}{(m-1)k}$. Nunc vero pro lente noſtra compoſita ſpatiolum diffuſionis dk ita exprimitur, vt ſit $-\frac{dk}{kk} = \frac{dm}{(m-1)p} + \frac{dn}{(n-1)q}$, quod ponamus non ad nihilum redigi, ſed parti $\frac{1}{\alpha}$ illius ſpatioli $\frac{dm}{(m-1)k}$ aequari debere; vt ſit ob $\frac{1}{k} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$:

$$\frac{dm}{(m-1)p} + \frac{dn}{(n-1)q} = \frac{dm}{\alpha(m-1)p} + \frac{dm}{\alpha(m-1)q}$$

vnde

vnde fit $\frac{q}{p} = \frac{-\alpha(n-1)dn}{(\alpha-1)(n-1)dm} + \frac{1}{\alpha-1} = \frac{-\alpha\lambda}{\alpha-1} + \frac{1}{\alpha-1}$ ideoque $q = -(\lambda + \frac{\lambda-1}{\alpha-1})p$. Dummodo ergo difperfio colorum modice imminuenda fit, proxime fit $q = -\lambda p$; vnde intelligitur, a vero valore ipfius λ minime effe recedendum.

31. Cum in lentibus fimplicibus, quae ingentem foci diftantiam habere debent, magnitudo fphaerarum, facies earum determinantium, in praxi maximam difficultatem creare foleat, hic commode vfu venit, vt etiam pro maxima diftantia focali admodum exiguae fphaerae negotium abfoluant; veluti fi foci diftantia k debeat effe 100 pedum, ex cafu primo radii facierum ita fe habebunt:

$a = 1,5083$ ped. $c = -1,5159$ ped.
$b = 1,5083$ ped. $d = -1,8956$ ped.

ficque ne fphaera quidem opus eft, cuius radius ad duos pedes exfurgat; ac talis lens facile aperturam 5 pollicum admittit, quantam diftantia focalis 100 pedum exigit, quin etiam aperturam 10 pollicum admitteret, vnde tubus confici poffet aeque amplificans, ac vulgaris 400 pedum, qui infuper a difperfione radiorum fit immunis. Verum pro exiguis telefcopiis huiusmodi lentes compofitae nullum vfum praeftabunt, quia debitae aperturae funt incapaces, quemadmodum iam pro diftantia focali decem pedum obferuaui, vbi apertura vix vnum pollicem fuperare poteft.

32. Ratio huius incommodi manifefto in hoc eft fita, quod binae vitri fpecies nimis parum ratione refractionis difcrepant; fi alia daretur materia diaphana,

 multo

multo magis a vitri ratione diſcrepans, nullum eſt dubium, quin duplicem ſcopum multo felicius attingere liceat. Aqua quidem multo minori refractionis gradu eſt praedita, ſed ob fluiditatem figurae lentium refragatur; cruſtis autem vitreis incluſa etiam vitri refractio accedit, et negotium turbat. Verum hoc incommodum tolli poſſe videtur, ſi cruſtae vbique aequaliter ſint craſſae, ſeu inſtar meniſcorum parentur, in quibus radius conuexitatis praeciſe ſit radio concauitatis aequalis, ſimulque craſſities ſit minima. Tales ergo lentes tanquam aqueas ſpectare licebit, operaeque pretium erit, conſtructionem eiusmodi lentium compoſitarum euoluere, vbi altera ſit vitrea, altera aquea.

III. Caſus, quo lens AB eſt aquea et lens CD vitrea.

33. Pro lente ergo priori eſt $m = \frac{4}{3}$ et pro poſteriori $n = \frac{31}{20}$, hinc fit $a = \frac{1}{3\mu} p$; $b = \frac{1}{3(1-\mu)} p$; $c = \frac{11}{20\nu} q$; $d = \frac{11}{20(1-\nu)} q$; tum vero $\lambda = \frac{31}{44} \frac{l\,n}{l\,m} = 1,073304$ et $l\lambda = 0,0307228$ et $A = \frac{77819}{81000} \lambda^2 = 3,08385$, atque $p = +0,06830\,k$; tum $\mu = \frac{11 + 3y}{15}$ et $\nu = \frac{6,675 + 31z}{142}$; $q = -0,07330\,k$.

Nunc vero numeros y et z ex hac aequatione definiri oportet:

$$zz = 8,25855 + 3,08385\,yy$$

Sumamus y ita, vt fiat $\mu = \frac{1}{2}$, eritque $y = -\frac{7}{6}$, et

$$zz = 12,45601, \text{ ideoque } z = \pm 3,52930$$

Sumatur valor poſitiuus, fietque $\nu = 0,81749$, hincque

$a = b$

$a = b = \frac{3}{5} p$; $c = \frac{0,55}{0,81749} q$; et $d = \frac{0,55}{0,18251} q$; vnde radii facierum ita se habebunt:

$a = 0,04553\ k$; $\quad c = -0,049315\ k$

$b = 0,04553\ k$; $\quad d = -0,220892\ k$

si $y = -\frac{1}{4}$ reperitur $\mu = \frac{18}{38}$; $\nu = 0,70301$

$a = 0,035947$; $\quad c = -0,057346$.

$b = 0.062091$; $\quad d = -0,135745$

si $y = -\frac{7}{8}$, fit $b = -c$, qui casus notandus.

34. In figura apposita sumsi $k = 5$ ped. vel 50 dig. mensurae Rhenanae, ita vt in digitis sit: Fig. 6.

pro lente AB vtriusque faciei radius conuex. $= 2,276$ dig.

ro lente autem CD radius faciei $\begin{cases} \text{inter.} = -2,466 \text{ dig.} \\ \text{poster.} = -11,045 \text{ dig.} \end{cases}$

vbi lentem anteriorem aqueam crustis vitreis inclusam repraesentaui, quae duabus meniscis constat, quarum tam conuexitatis quam concauitatis radius sit 2,276 dig. Has igitur lentes iungendo oritur lens composita, distantiam focalem 5 pedum habens, quae si aperturam 2 dig. admitteret, ad multiplicationem sexagies adhiberi posset. Sin autem mensurae assignatae duplicentur, vt lens composita consequatur distantiam focalem 10 pedum, ea certe aperturam vltra 3 digitos admittet, ideoque obiecta plus quam centies multiplicare poterit.

35. Hic posita ratione refractionis ex aere in vitrum $= 1,55:1$, pro ratione refractionis ex aere in aquam assumsi $= 1,33:1$, quae si forte a veritate aberret, constructio lentis compositae hic descriptae voto minime

minime respondebit, siquidem, vt vidimus, minima aberratio omnem nostram expectationem fallere potest. Huic autem incommodo remedium afferri posse videtur, si mixtura ex aqua et spiritu vini ita praeparetur, vt differentia refractionum accuratissime conueniat cum ea, quae in calculo fuerit assumta. Cum igitur ratio refractionis ex aere in spiritum vini sit fere $=1,37:1$, ponamus, eiusmodi fieri mixturam, in qua ratio refractionis sit $1,35:1$. quae semper certe obtineri poterit, atque retenta vitri refractione $=1,55:1$, determinationes vtriusque lentis pro hoc casu quaeramus, vbi quidem lentem anteriorem ex aqua, posteriorem vero ex vitro confici ponamus.

IV. Casus, quo $m=1,35$ et $n=1,55$.

36. Erit ergo $a=\frac{0,35}{\mu}p$; $b=\frac{0,35}{1-\mu}p$; $c=\frac{0,55}{\nu}q$; $d=\frac{0,55}{1-\nu}q$, tum $\lambda=\frac{(m-1)n\,l\,n}{(n-1)m\,l\,m}=1,06698$ et $l\lambda=0,0281572$ et $p=(1-\frac{1}{\lambda})k=0,06278\,k$; $q=-(\lambda-1)k=-0,06698\,k$. Porro $A=\frac{m(n-1)^2(n+2)}{n(m-1)^2(m+2)}\lambda^3=2,76215$. Iam statuamus esse $\mu=\frac{1}{2}$, ac fit $my=2-2mm$, hinc $y=-1,218518$ et aequatio, ex qua z definiri debet, est

$$zz=12,15346-5,2+0.08648+4,11065$$

seu $zz=11,15059$ et $z=3,33925$,

vnde $\nu=\frac{n(2n+1)+4\lambda(nn-1)+nz}{2(n+2)}=0,78099$.

Ergo $a=b=0,7p$; $c=\frac{0,55\,q}{0,78099}$; $d=\frac{0,55\,q}{0,21901}$;

ex quo lentis constructio ita se habebit:

$a=0,043946\,k$; $c=-0,04717\,k$

$b=0,043946\,k$; $d=-0,16807\,k$.

37.

37. Forma huius lentis parum differt a praecedente, et quo distantia focalis k fiat 50 dig. lentis aqueae A B conuexae radium vtriusque faciei sumi oportet $= 2,1973$ dig. pro altera autem lente vitrea CD statui debet radius faciei $\begin{cases} \text{anterioris} = 2,3585 \text{ dig.} \\ \text{posterioris} = 8,4035 \text{ dig.} \end{cases}$ vtraque facta concaua Quodsi talis lens omni cura fuerit elaborata, tum variae praeparentur mixturae ex aqua et spiritu vini secundum diuersas proportiones, et experimentando exploretur, quaenam earum binis meniscis inclusa optatum effectum producat: haecque methodus lentem omnibus numeris absolutam obtinendi commodissima videtur, et ad praxin maxime idonea. Distantiam quidem focalem non nimis paruam assumi conuenit, quia talis lens sufficientem aperturam non admitteret, et hanc ob causam ea non infra 5 pedes sumenda videtur; quo maior autem statuatur, eo luculentius erit lucrum prae lentibus simplicibus eiusdem foci.

38. Ex his casibus euolutis colligimus, si duae materiae pellucidae diuersae indolis praesto sint, ac lens anterior seu obiecta respiciens ex ea, quae minore refractione gaudet, conficiatur, eam vtrinque aeque conuexam fieri posse; tum autem alteram, ex materia magis refringente factam vtrinque quidem concauam, sed inaequaliter, confici debere. Operae igitur pretium erit, si lentis anterioris A B vtriusque faciei radius detur, conspectui exponere, quomodo radii vtriusque faciei concauae, alterius lentis definiantur Cum igitur in casibus expositis sit ratio refractionis pro lente po-

 steriori

ſteriori $n = \frac{11}{10}$, poſito $a = b = 1$, radii c et d ita ſe habebunt :

	ſi $m = 1,55$	ſi $m = 1,50$	ſi $m = 1,35$	ſi $m = 1,33$
$a = 1$	$c = -1,0000$	$c = -1,00506$	$c = -1,07336$	$c = -1,08314$
$b = 1$	$d = -1,0000$	$d = -1,25680$	$d = -3,82758$	$d = -4,85157$

vnde etiam pro caſibus mediis valores c. et d. concludere licet.

APPENDIX
de lentium obiectiuarum vulgarium emendatione.

39. Si vel duplicis generis vitrum, cuius quidem refractionis ratio ſatis ſit diuerſa, comparari nequeat, vel ſi aquae vſus minus ex voto ſuccedat, calculus ſupra euolutus ſumma cum vtilitate ad emendationem lentium vulgarium adhiberi poterit, neglecta priori conditione, qua diſperſioni colorum occurritur. Iam pridem quidem lentium multiplicatione confuſionem a figura ſphaerica oriundam imminuere, atque adeo ad nihilum redigere ſum conatus, verum ibi ſingulas lentes ſeorſim minimam confuſionem parere aſſumſi, qui caſus ad praxin maxime accommodatus videbatur; neque tum hunc ſcopum binis lentibus attingere licuit. Si autem lentes quascunque admittere velimus binis coniungendis confuſio omnis tolli poterit, vbi autem probe tenendum eſt, multo maiorem ſollertiam ad eas efformandas ab artifice requiri.

40. Quo igitur huic tantum conditioni ſatisfaciamus, ambas lentes ex pari vitri ſpecie confectas aſſumo

mo, vt ſit $n = m$; ac poſita prioris AB diſtantia focali $= p$, poſterioris CD vero $= q$, facies lentium ita ſe habebunt, vt ſint earum radii $a = \frac{m-1}{\mu} p$; $b = \frac{m-1}{1-\mu} p$; $c = \frac{m-1}{\nu} q$, et $d = \frac{m-1}{1-\nu} q$. Nunc cum de colorum diſperſione tollenda non ſit quaeſtio, numerus λ pro arbitrio aſſumatur, ſeu ſit $q = -\lambda p$, vnde poſita lentis compoſitae diſtantia focali $= k$, erit $p = (1 - \frac{1}{\lambda}) k$, et $q = -(\lambda - 1) k$. Tum vero ſi ponamus $\mu = \frac{m(2m+1)+my}{2(m+2)}$ et $\nu = \frac{m(2m+1)-2\lambda(mm-1)+mz}{2(m+2)}$ ob quantitatem $A = \lambda^3$, vniuerſa determinatio ad huius aequationis reſolutionem perducitur:

$$zz = (4m-1)(\lambda^3-1) + 4(m-1)^2 \lambda(\lambda-1) + \lambda^3 yy,$$

vbi patet, ſingulos valores pro y et z inueniendos tam affirmatiue quam negatiue accipi poſſe.

41. Statuamus ergo pro vitro, vnde ambae lentes parantur, $m = \frac{31}{20} = 1,55$, quo valore ſubſtituto habebimus:

$$a = \frac{0,55}{\mu} p; \; b = \frac{0,55}{1-\mu} p; \; c = \frac{0,55}{\nu} q; \; d = \frac{0,55}{1-\nu} q$$

tum vero $p = (1 - \frac{1}{\lambda}) k$ et $q = -(\lambda - 1) k$.
Porro $\mu = \frac{1271 + 310 y}{1420}$ et $\nu = \frac{1271 - 1122 \lambda + 310 z}{1420}$ vnde aequatio reſoluenda erit:

$$zz = (\tfrac{26}{5} + yy)\lambda^3 + 1,21 \lambda\lambda - 1,21 \lambda - \tfrac{26}{5}$$

vbi euidens eſt, pro y omnes numeros pro lubitu aſſumi poſſe, cum pro zz ſemper numerus poſitiuus prodeat, dum ſit $\lambda > 1$. At ſi $\lambda < 1$, ob terminos negatiuos praeualentes, numerus y certum limitem ſuperare debet. Verum pro λ valorem negatiuum omnino aſſumere non licet. Perpetuo autem cauendum eſt, ne nu-

numeri μ et ν extra limites o et 1 excurrant, quippe quo casu menisci orientur, in quibus leuissimus error funestus esse potest.

42. Statuatur ergo lens prior AB vtrinque aequaliter conuexa, seu $\mu = \frac{1}{2}$, sumique debet $310y = 710 - 1271$, seu $y = -\frac{561}{310}$, et $yy = 3,27493$. vnde nostra aequatio erit:

$$zz = 8,47493\lambda^3 + 1,21\lambda\lambda - 1,21\lambda - 5,2$$

et habebimus $a = b = 1,1p = \frac{11}{10}(1 - \frac{1}{\lambda})k$

si $\lambda = 2$; $a = b = 0,55k$; $c = \frac{-55k}{176,033}$; $d = \frac{55k}{76,033}$

seu $c = -0,31244k$; $d = +0,72337k$.

Hic primo obseruo, si esset $\lambda = 1$, fieret $zz = yy$, hoc autem casu ambae distantiae focales p et q euanescerent. Tum si λ parum superet vnitatem, quantitates p et q nimis fierent exiguae, quod in praxi non parum est incommodum. In superiori Casu III. habuimus $\lambda = 1,073$, quo ergo valore hic maiores assumamus. Neque vero opus est, vt ad valorem $\lambda = 2$ ascendamus, quia tum numerus ν limites o et 1 transgrederetur. Sequentes ergo casus euoluamus.

Casus I.

43. Sit $\lambda = \frac{11}{10}$, erit $p = \frac{1}{11}k$; $q = -\frac{1}{10}k$ et $a = b = \frac{1}{10}k$; tum vero $zz = 6,21323$ et $z = \pm 2,49263$, cuius sumto valore positiuo fit $\nu = \frac{809,5155}{1420} = 0,57008$, ergo $c = \frac{0,55q}{0,57008}$ et $d = \frac{0,55q}{0,42992}$. Ex quo binarum lentium radii facierum erunt:

$a = 0,10000k$; $\quad c = -0,09649k$

$b = 0,10000k$; $\quad d = -0,12796k$

haec

haec ergo lens ad summum admittit aperturam, cuius diameter $= \frac{64}{1000}k = \frac{1}{15}k$; quae ergo ad satis paruas distantias focales adhiberi potest.

Casus II.

44. Sit $\lambda = \frac{12}{10} = 1,2$; erit $p = \frac{1}{6}k$ et $q = -\frac{1}{5}k$; atque $a = b = \frac{11}{60}k = 0,18333k$. Tum vero reperitur:

$$zz = 9,73507 \text{ et } z = 3,12011,$$

hincque $v = \frac{1271 - 1546 + 967,211}{1420} = 0,62805$

ergo $c = \frac{0,55q}{0,62805}$ et $d = \frac{0,55q}{0,37195}$,

vnde pro lentibus construendis radii ita se habent:

$$a = 0,18333k; \quad c = -0,17514k$$
$$b = 0,18333k; \quad d = -0,29573k$$

quae lens admittit aperturam $\frac{1}{8}k$ in diametro.

Casus III.

45. Sit $\lambda = \frac{13}{10} = 1,3$; erit $p = \frac{5}{13}k$; $q = -\frac{3}{10}k$ atque $a = b = \frac{33}{130}k = 0,253846k$; tum vero prodit:

$$zz = 13,89130 \text{ et } z = 3,72710$$

hinc $v = \frac{967,801}{1420} = 0,68155$; $c = \frac{0,55q}{0,68155}$ et $d = \frac{0,55q}{0,31845}$

vnde radii pro vtraque lente ita se habent:

$$a = 0,25385k; \quad c = -0,24209k$$
$$b = 0,25385k; \quad d = -0,51813k$$

aperturae diameter esse potest $\frac{1}{6}k$.

Casus IV.

46. Sit $\lambda = \frac{14}{10} = 1,4$; erit $p = \frac{2}{7}k$ et $q = -\frac{2}{5}k$; atque $a = b = \frac{22}{70}k$; tum vero prodit:

$$zz = 18,73277 \text{ et } z = 4,32814$$

 hinc

hinc $y = \frac{1041,925}{1420} = 0,73375$
Ergo $c = \frac{0,55q}{0,73375}$ et $d = \frac{0,55q}{0,26625}$, vnde radii vtriusque faciei erunt :

$a = 0,31429\,k; \quad c = -0,29981\,k$
$b = 0,31429\,k; \quad d = -0,82625\,k$

hic diameter aperturae esse potest $\frac{1}{3}k$.

Casus V.

47. Sit $\lambda = \frac{3}{2} = 1,5$; erit $p = \frac{1}{3}k, q = -\frac{1}{2}k$ atque $a = b = \frac{11}{30}k$; tum vero prodit :

$zz = 24,31033$ et $z = 4,93056$

hincque $y = \frac{1116,4706}{1420} = 0,78624$.
Ergo $c = \frac{0,55q}{0,78624}$ et $d = \frac{0,55q}{0,21376}$, vnde radii vtriusque faciei nostrarum lentium sunt :

$a = 0,36666\,k; \quad c = -0,34976\,k$
$b = 0,36666\,k; \quad d = -1,28650\,k$

cuius diameter aperturae fere ad $\frac{1}{4}k$ exsurgere potest, siquidem sumamus, in huiusmodi lentibus diametrum aperturae duabus partibus tertiis radii minimi aequari posse ; vt arcus nullus 40 gradibus maior in aperturam ingrediatur.

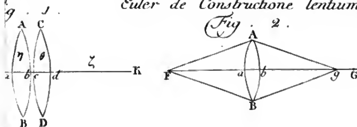
48. Cum eadem ergo lente priori A B infinitae lentes concauae coniungi possunt, prout alia atque alia distantia focalis requiritur. Ita si lentis A B vterque radius vnitate exprimatur, alterius lentis C D radii vtriusque concauitatis ita se habebunt secundum 5 casus euolutos :

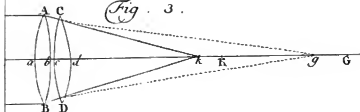
	Cas. I	Cas. II	Cas. III	Cas. IV	Cas. V
$a = 1$; $c =$	-0 9649	0,9553	-0,9537	-0,9539	-0,9539
$b = 1$; $d =$	-1,2796	-1,6131	-2,0411	-2,6290	-3,5086

vbi

vbi imprimis notatu dignum euenit, quod in casibus II, III, IV et V valor ipsius c vix mutetur. Quodsi ergo lentis vtrinque aequaliter conuexae radius ponatur $=1$, alterius vero lentis concauae altera facies ita formetur, vt eius radius sit $=0,9538$, altera eius facies arbitrio nostro relinquitur, dummodo sit concaua, eiusque radius intra limites 2 et 4 contineatur; id quod in praxi maximum commodum praestat, cum non sit necesse, vt artifex tantopere sit sollicitus in hac postrema facie effingenda.

Euler de Constructione lentium.














BIBLIOTECA